

Mécanique des fluides

Section de génie civil

TD 4 - Correction

Exercices

Exercice 1 Un bassin contenant de l'eau sur une profondeur de 9 m est fermé par une porte verticale constituée par 3 panneaux plans A, B et C (figure 2).

- Quelle doit être la hauteur de chaque panneau pour que chacun supporte le même effort total? Donner les profondeurs z_1 et z_2 .
- Chaque panneau doit être renforcé au niveau du centre de poussée. Calculer la position de ces renforts.
- Quelle est la valeur de la force agissant sur chaque panneau?

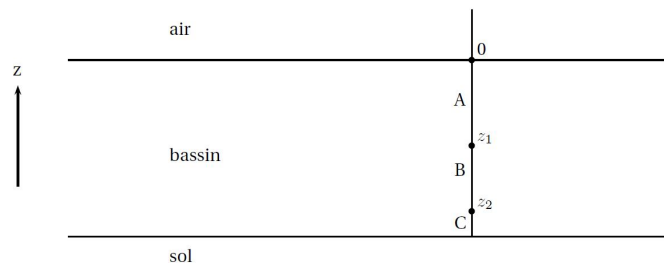


FIGURE 1 – Schéma des 3 panneaux plans.

Exercice 2 Une vanne de fond CD de 1,8 m de large et de 2 m de long est disposée selon la figure 3. On suppose que la vanne est composée d'un matériau homogène et on néglige le frottement en C. Déterminer le poids nécessaire de la vanne pour la garder fermée jusqu'à ce que le niveau d'eau atteigne 2 m au dessus de C.

Exercice 3 Une vanne radiale maintient un niveau d'eau constant à 10 m au dessus du sommet d'un barrage à Manchester (figure 4). Le rayon de la

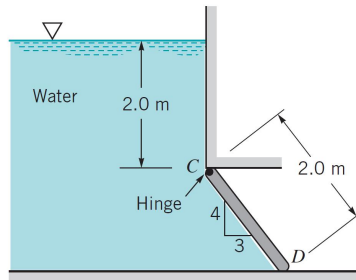


FIGURE 2 – Vanne de fond.

vanne est de 22 m et sa longueur 10 m. Le point de pivot A est situé à 10 m du sommet du barrage C. Déterminer la norme de la résultante des forces sur la vanne. La résultante passe-t-elle à travers le pivot?

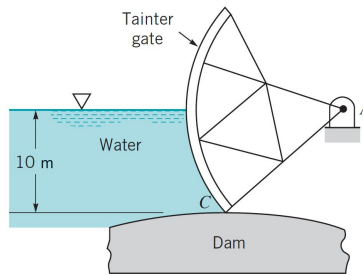


FIGURE 3 – Vanne semi-circulaire.

Exercice 4 Un cylindre de masse M , de longueur L et diamètre $D = 2R$ repose sur un fond horizontal. Il sert à séparer deux fluides : à gauche, le fluide 1 a une masse volumique ρ_1 et une hauteur $h_1 = D$ tandis qu'à droite, le fluide 2 a une épaisseur $h_2 = R$ et une masse volumique ρ_2 . On ignore la pression atmosphérique.

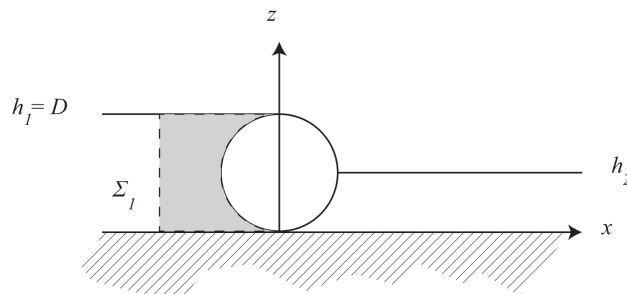


FIGURE 4 – Schéma du cylindre.

- (a) Calculer la force de pression exercée par le fluide 1 sur le cylindre. Pour cela on écrira la distribution de pression hydrostatique et on l'intégrera sur la surface de contact du cylindre.
- (b) Calculer la force de pression exercée par le fluide 2 sur le cylindre.
- (c) En déduire pour quelles conditions le cylindre ne bouge pas (on ne fera ici qu'un bilan des forces sans considérer les moments de force).
- (d) Considérer le volume de contrôle Σ_1 dans la couche de fluide 1. Écrire le bilan de forces statiques sur ce volume et en déduire la force de pression exercée par le fluide 1 sur la surface gauche du cylindre. Comparer avec le résultat de la première question. Qu'en concluez-vous quant à la méthode de calcul des forces de pression?

Exercice 5 Un récipient est évidé en son centre par une rainure, et un cylindre en verre obstrue cette rainure. Le cylindre est partiellement enfoncé dans la rainure. On note $\alpha = \pi/3$ l'angle que fait le point de contact du cylindre avec la rainure par rapport à la verticale. Le rayon est $R = 10\text{cm}$. Les hauteurs du récipient sont $a = 30\text{cm}$ et $b = 20\text{cm}$. On traitera le problème comme bidimensionnel (on ignore la direction normale à la feuille); par défaut, les forces seront donc des forces par unités de longueur. Le plan de référence $z = 0$ est le plan sur lequel repose le cylindre. La hauteur d'eau est notée h , et elle est comptée à partir du fond du récipient. On néglige la pression atmosphérique. La masse volumique du fluide est $\rho = 1000\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$. La masse volumique du cylindre est $\rho_v = 2500\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

- (a) Que vaut le champ de pression (en fonction de h , z et b)?
- (b) On veut calculer la force de pression exercée par le fluide sur le cylindre. On va commencer par un calcul classique. On appelle \mathbf{n} la normale d'une surface infinitésimale. Exprimer les coordonnées de la normale \mathbf{n} et de la force élémentaire de pression $d\mathbf{F} = p\mathbf{n}dS$.
- (c) Intégrer cette expression et déterminer la résultante des forces de pression.
- (d) Appliquer le principe d'Archimède pour trouver la force.
- (e) Pour quelle hauteur d'eau le cylindre reste en place? Est-ce que cette condition est vérifiée ici?

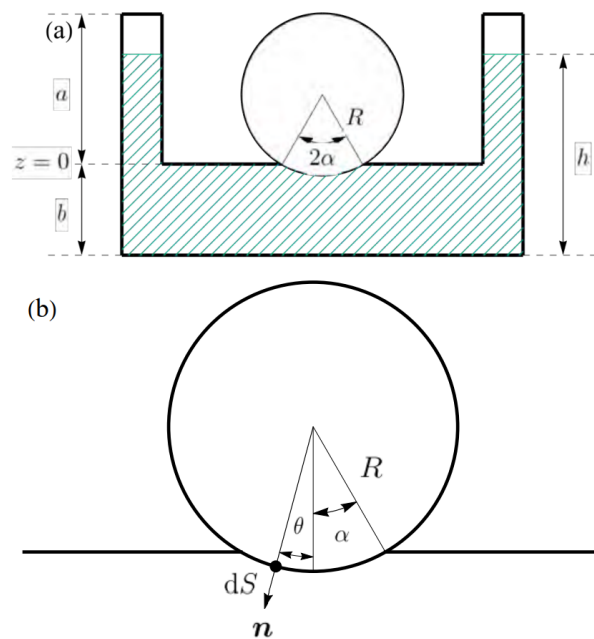


FIGURE 5 – (a) Schéma de principe. (b) Définition des variables pour le calcul infinitésimal.

Corrections

Exercice 1

- (a) Ici la définition de la force de pression pour calculer la force exercée sur chaque panneau :

$$F_A = \int_{z_1}^0 -\rho g z \, dz = \rho g \frac{z_1^2}{2},$$

$$F_B = \int_{z_2}^{z_1} -\rho g z \, dz = \frac{\rho g}{2} (z_2^2 - z_1^2),$$

$$F_C = \int_h^{z_2} -\rho g z \, dz = \frac{\rho g}{2} (h^2 - z_2^2).$$

Comme nous voulons que $F_A = F_B = F_C$, cela nous donne les conditions :

$$z_1^2 = \frac{z_2^2}{2},$$

$$z_1^2 = h^2 - z_2^2.$$

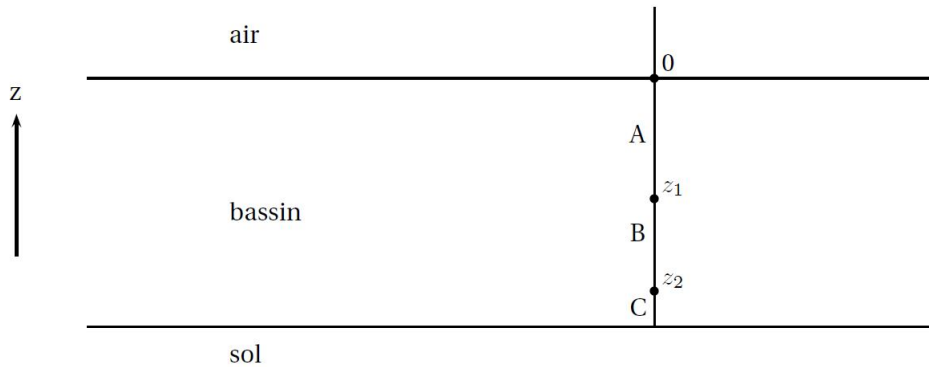


FIGURE 6 – Schéma des 3 panneaux plans

En résolvant ces équations, on obtient $z_2 = h\sqrt{2/3} = -7,35$ m et $z_1 = z_2/\sqrt{2} = h/\sqrt{3} = -5,2$ m, ou bien $H_A = 5,2$ m, $H_B = z_2 - z_1 = 2,15$ m et $H_C = h - z_2 = 1,65$ m.

- (b) Pour le centre de pression z_c , on utilise le fait que le calcul du moment de la force de pression au point C est nul (car la résultante de la force de pression agit en ce point). Donc

$$M_C = \int_{z_a}^{z_b} r \times dF = 0.$$

Cela donne donc dans notre cas

$$M_C = \int_{z_a}^{z_b} (z - z_c) \rho g z dz = 0.$$

Donc pour chaque panneau cela s'écrit

$$\begin{aligned} \rho g \left[\frac{z^3}{3} - z_c \frac{z^2}{2} \right]_{z_a}^{z_b} &= 0 \\ \Rightarrow z_c &= \frac{2(z_b^3 - z_a^3)}{3(z_b^2 - z_a^2)}. \end{aligned}$$

Cela donne pour A ($z_a = z_1 = -5,2$ m, $z_b = 0$) $z_{c_A} = \frac{2}{3}z_1 = -3,46$ m. Pour B ($z_a = z_2 = -7,35$ m, $z_b = z_1 = -5,2$ m) $z_{c_B} = -6,33$ m. Pour C ($z_a = h = -9$ m, $z_b = z_2 = -7,35$ m) $z_{c_C} = -8,2$ m.

- (c) La force qui agit sur chaque panneau, $F_A = F_B = F_C = \rho g z_1^2 / 2 = 1,35 \times 10^5$ N/m.

Exercice 2 Pour commencer il faut trouver le moment en O dû à la force de pression. Cette force élémentaire s'écrit comme

$$dF_p = -\mathbf{n}p(r) ds,$$

où $\mathbf{n} = (-\cos\theta, 0, \sin\theta)$ le vecteur normal à la surface de la vanne, $p(r) = \rho g(h + r \cos\theta)$ la pression hydrostatique et $ds = L dr$ la surface élémentaire. On note h la profondeur d'eau jusqu'au niveau du pivot (2 m). On peut donc écrire

$$dM_{O,F_p} = \mathbf{r} \times d\mathbf{F} = -\mathbf{r} \times \mathbf{n} p(r) L ds,$$

où $\mathbf{r} = (r \sin\theta, 0, r \cos\theta)$. Pour obtenir le moment résultant on intègre cette expression. En notant que $-\mathbf{r} \times \mathbf{n} = (0, 1, 0)$ on peut calculer l'intensité du moment comme

$$M_{O,F_p} = \int_0^l r p(r) L dr,$$

ce qui devient :

$$\int_0^l r p(r) L dr = L \rho g \int_0^l r(h + r \cos\theta) dr = \rho g L \left[\frac{hr^2}{2} + \frac{r^3}{3} \cos\theta \right]_0^l$$

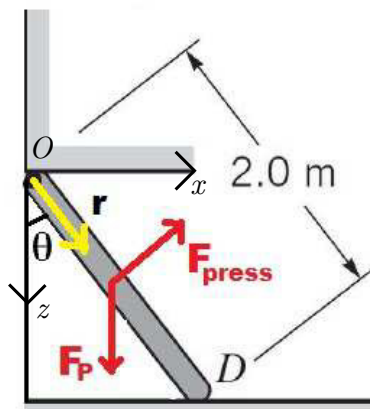


FIGURE 7 – Vanne de fond avec forces

Le moment en O dû au poids s'écrit comme (avec $\mathbf{r}_g = l/2(\sin\theta, 0, \cos\theta)$ la position du centre de gravité de la vanne)

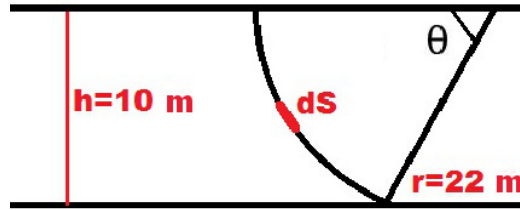


FIGURE 8 – Vanne semi-circulaire avec dimensions

$$M_{O, F_{poids}} = \|\mathbf{r}_g \times \mathbf{F}_{poids}\| = \frac{l}{2} mg \sin \theta$$

La condition d'équilibre s'écrit donc $M_{O, F_{poids}} = M_{O, F_p}$, d'où

$$m = \frac{2\rho L}{\sin \theta} \left(\frac{hl}{2} + \frac{l^2}{3} \cos \theta \right) = 180 \text{ kN}$$

soit une masse de $m = 18,4$ tonnes.

Exercice 3 On veut calculer la résultante des forces de pression sur le barrage.

$$\begin{aligned} dF &= -pn ds, \\ p(z) &= \rho gz, \\ ds &= rL d\theta \end{aligned}$$

où z est la profondeur, ρ la masse volumique de l'eau, L la longueur de vanne (perpendiculaire à la page), et r et θ définis comme sur la figure 8. La norme de la résultante des forces sur la vanne s'écrit :

$$dF = \rho g z r L d\theta$$

avec $z = r \sin \theta$. On peut donc écrire chacune des composantes de dF comme

$$\begin{aligned} dF_x &= dF \cos \theta = \rho g r^2 L \sin \theta \cos \theta d\theta, \\ dF_z &= dF \sin \theta = \rho g r^2 L \sin^2 \theta d\theta. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
F_x &= \int_0^{\theta_{max}} \rho g r^2 L \sin \theta \cos \theta \, d\theta \\
&= \left[\frac{\rho g r^2 L}{2} \sin^2 \theta \right]_0^{\theta_{max}} \\
&= \frac{\rho g h^2 L}{2}
\end{aligned}$$

Car $r \sin \theta_{max} = h$.

$$\begin{aligned}
F_z &= \int_0^{\theta_{max}} \rho g r^2 L \sin^2 \theta \, d\theta \\
&= \int_0^{\theta_{max}} \rho g r^2 L \frac{(1 - \cos 2\theta)}{2} \, d\theta \\
&= \left[\frac{\rho g r^2 L}{2} \left(\theta - \frac{\sin 2\theta}{2} \right) \right]_0^{\theta_{max}} \\
&= \frac{\rho g r^2 L}{2} (\theta_{max} - \sin \theta_{max} \cos \theta_{max}) \\
&= \frac{\rho g r^2 L}{2} \left(\arcsin \left(\frac{h}{r} \right) - \frac{h}{r} \sqrt{1 - \frac{h^2}{r^2}} \right)
\end{aligned}$$

Comme la vanne est circulaire et que la pression est normale à la surface de la vanne, cette dernière agit sur le rayon de la vanne (force centripète). La résultante de la force de pression passe donc à travers le pivot. Pour le vérifier il faut calculer le centre de pression (voir exercice 2) et montrer que le moment en A de la force de pression s'annule.